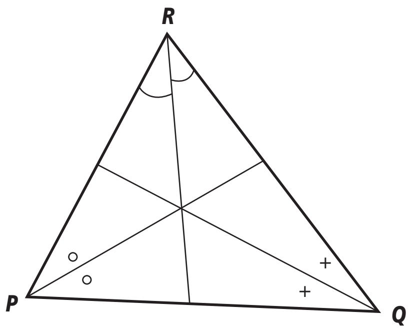
Hoofdstuk 2 – Vlakke meetkunde

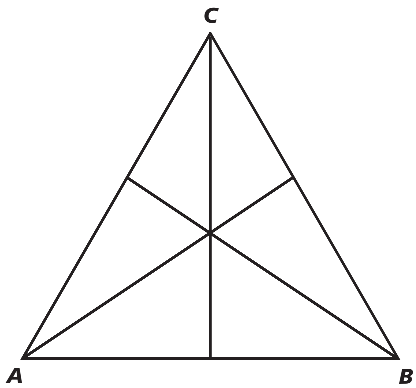
Opstap Hoeken, driehoeken en vierhoeken

0-1a $\angle P = 65^\circ$

bc

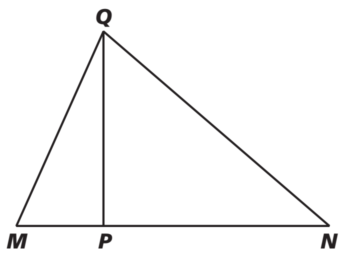


0-2ac



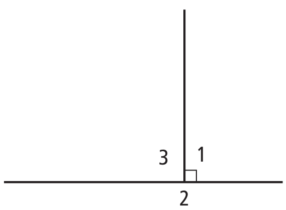
b De driehoek is een gelijkzijdige driehoek.

0-3ab



c De lengte van OP is 3,5 cm.
De oppervlakte van $\triangle MNO$ is $MN \times OP : 2 = 5{,}4 \times 3{,}5 : 2 = 9{,}45$ cm^2.

0-4a



Hoek 1 is een hoek van 90 graden. Dat is een rechte hoek.
Hoek 2 is een hoek van 180 graden. Dat is een gestrekte hoek.
Een volle hoek is 360 graden. De hoeken 1, 2 en 3 samen zijn een volle hoek.

b $\angle A_1$ en de hoek van 124º vormen samen een gestrekte hoek, dus zijn ze samen 180º.
Dan is $\angle A_1 = 180° - 124° = 56°$.
De hoeken $\angle D_1$, 21º en 90º vormen een gestrekte hoek en zijn dus samen 180º.
Dan is $\angle D_1 = 180° - 21° - 90° = 69°$.

c De som van de drie hoeken in een driehoek is 180º.

d De hoeken K, L en M zijn samen 180º, dus $\angle K = 180° - 80° - 45° = 55°$.
De hoeken D, E en F zijn samen 180º, dus $\angle E = 180° - 48° - 35° = 97°$.

0-5a Teken lijnstuk BD in vierhoek $ABCD$.

b De drie hoeken van een driehoek zijn altijd 180º, dus de hoeken van $\triangle ABD$ zijn samen 180º.

c Ook de drie hoeken van $\triangle BCD$ zijn samen 180º.

d De hoeken van vierhoek $ABCD$ zijn dus samen 180º + 180º = 360º.
De hoeken van een vierhoek zijn 360º.

0-6

	vierkant	*rechthoek*	*vlieger*	*ruit*	*parallellogram*
de diagonalen zijn even lang	waar	waar	niet waar	niet waar	niet waar
de diagonalen staan loodrecht op elkaar	waar	niet waar	waar	waar	niet waar
de diagonalen delen elkaar middendoor	waar	waar	niet waar	waar	waar

0-7a Klopt.

b Driehoek ①: $\dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

Driehoek ②: $\dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{4{,}5}{6} = 0{,}75$

Driehoek ③: $\dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{7{,}5}{10} = 0{,}75$

c $\tan^{-1} 0{,}75 = 36{,}8º$ Afgerond op hele graden is dat 37º.

0-8a Driehoek ABC: $\tan \angle B = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{10}{15}$.

Dan is $\angle B = \tan^{-1}(\frac{10}{15}) = 34°$.

Driehoek DEF: $\tan \angle D = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{EF}{DE} = \dfrac{40}{30} = \dfrac{4}{3}$.

Dan is $\angle D = \tan^{-1}(\frac{4}{3}) = 53°$.

b In driehoek ABC zijn de drie hoeken samen 180º. Verder is $\angle A = 90°$ en $\angle B = 34°$.
Dan is $\angle C = 180° - 90° - 34° = 56°$.
In driehoek DEF zijn de drie hoeken samen 180º. Verder is $\angle E = 90°$ en $\angle D = 53°$.
Dan is $\angle F = 180° - 90° - 53° = 37°$.

2-1 Rekenen met hoeken

1a $\angle A$ en $\angle D$ zijn samen 180º, dus vormen een gestrekte hoek.
b Een volle hoek is 360º. $\angle B + \angle D + \angle E = 60° + 160° + 140° = 360°$.
Met de hoeken B, D en E kun je een volle hoek maken.

2a De vier hoeken vormen een volle hoek en zijn dus samen 360º.
b $\angle A_1$ en $\angle A_4$ vormen een gestrekte hoek en zijn samen dus 180º.
c $\angle A_4 = 180° - \angle A_1 = 180° - 65° = 115°$
d $\angle A_2$ en $\angle A_4$ vormen samen een gestrekte hoek en zijn samen 180º.
$\angle A_2 = 180° - \angle A_1 = 180° - 65° = 115°$
$\angle A_3$ en $\angle A_2$ vormen samen een gestrekte hoek en zijn samen 180º.
$\angle A_3 = 180° - \angle A_2 = 180° - 115° = 65°$
e $\angle A_1 = \angle A_3$ en $\angle A_2 = \angle A_4$

3 De drie hoeken bij M vormen een gestrekte hoek en zijn dus samen 180º.
Dan is $\angle M = 180° - 90° - 72° = 18°$.

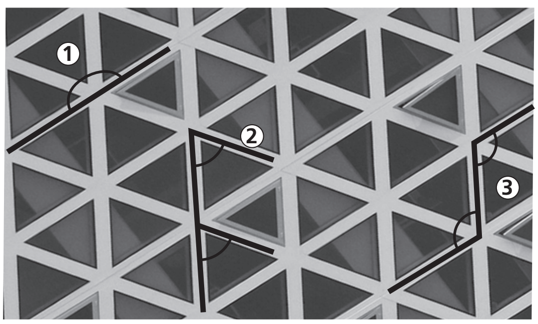
De twee hoeken bij J vormen een gestrekte hoek en zijn samen 180º.
Dan is $\angle J = 180° - 34° = 146°$.

De drie hoeken van driehoek ABC zijn samen 180º.
Dan is $\angle B = 180° - 63° - 83° = 34°$.

4a Lijn k loopt evenwijdig aan lijn m.
b $\angle D_1$ zit samen met $\angle E_2$ een F-figuur.
c $\angle D_1$ zit samen met $\angle E_4$ een Z-figuur.
d $\angle D_2 = \angle D_4 = 180° - \angle D_1 = 180° - 95° = 85°$, want het zijn steeds gestrekte hoeken.
$\angle D_3 = \angle D_1 = 95°$, want het zijn overstaande hoeken.

5 $\angle A_1 = 180° - \angle A_2 = 180° - 125° = 55°$ (de hoeken vormen een gestrekte hoek)
$\angle B_1 = \angle B_3 = 125°$ (overstaande hoeken)
$\angle B_2 = \angle B_4 = 180° - \angle B_3 = 180° - 125° = 55°$ (ze vormen een gestrekte hoek)
$\angle E_2 = 180° - \angle E_1 = 180° - 85° = 95°$ (gestrekte hoek)
$\angle C = 180° - \angle B_4 - \angle E_2 = 180° - 55° - 95° = 30°$ (som van de hoeken van een driehoek)
$\angle D_2 = \angle E_1 = 85°$ (hoeken van een F-figuur)
$\angle D_4 = \angle D_2 = 85°$ (overstaande hoeken)
$\angle D_1 = \angle D_3 = 180° - \angle D_2 = 180° - 85° = 95°$ (gestrekte hoek)

6a



b De hoeken van de ramen zijn allemaal 60º.

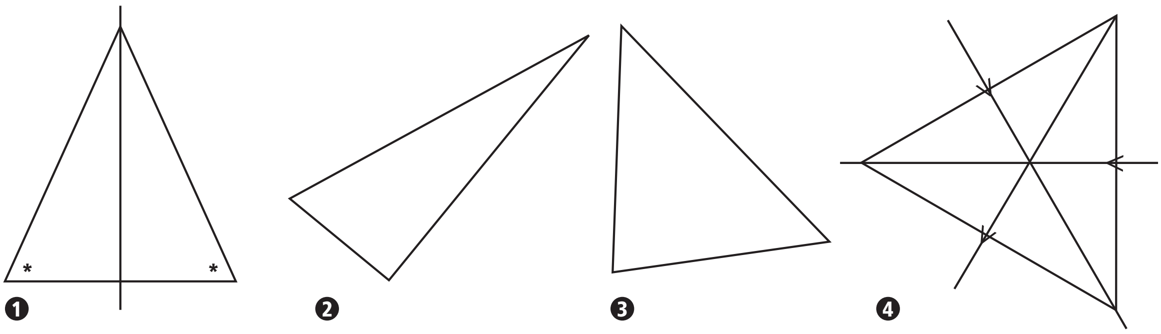
7a De lijnstukken PQ en VT zijn evenwijdig.
b $\angle R$ vormt samen met $\angle V_1$ een Z-figuur.
c $\angle R = 30°$
d $\angle Q_2 = 180° - \angle Q_1 = 180° - 70° = 110°$ (gestrekte hoek)
e In driehoek QRS zijn de drie hoeken samen 180º.
$\angle R = 30°$ (opdracht c) en $\angle Q_2 = 110°$ (opdracht d)
Dan is $\angle S = 180° - \angle R - \angle Q_2 = 180° - 30° - 110° = 40°$
(som van de hoeken in een driehoek is 180º)
$\angle S_? = 180° - 40° = 140°$ (gestrekte hoek)

$\angle V_2 = 360° - \angle P - \angle Q_1 - \angle S_? = 360° - 60° - 70° - 140° = 90°$
(som van de hoeken van en vierhoek is 360º)

2-2 Lijn- en draaisymmetrie

8a Driehoek ① is een gelijkbenige driehoek.
Driehoek ② is een rechthoekige driehoek.
Driehoek ④ is een gelijkzijdige driehoek.

b



c In driehoek ① zitten twee gelijke hoeken.
In driehoek ④ zitten drie gelijke hoeken.

d

	driehoek ①	driehoek ②	driehoek ③	driehoek ④
Naam	gelijkbenig	rechthoekig	geen	gelijkzijdig
Aantal symmetrieassen	1	0	0	3
Gelijke zijden? Zo ja, hoeveel?	2	0	0	3
Gelijke hoeken? Zo ja, hoeveel?	2	0	0	3
Draaisymmetrisch	nee	nee	nee	ja

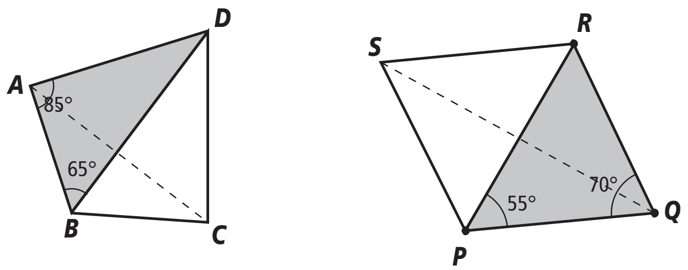
9a De drie hoeken zijn samen 180º.
b Voor de hoeken E en F blijft over 180º − 120º = 60º.
c De hoeken E en F zijn even groot, dus $\angle E = 60° : 2 = 30°$.

10a Omdat driehoek DBC gelijkbenig is, geldt $\angle D_1 = \angle B_1$.

b $\angle D_1 + \angle B_1 = 2 \times 25° = 50°$, dus $\angle C = 180° - 50° = 130°$.

c De drie hoeken zijn samen 180º, dus $\angle B_2 = 180° - 90° - 58° = 32°$.

11ad



b $ABCD$ is een vlieger.

c $\angle A = 85°$, $\angle B = 2 \times 65° = 130°$, $\angle C = \angle A = 85°$
Verder is $\angle D = 360° - \angle A - \angle B - \angle C = 360° - 85° - 130° - 85° = 60°$.

e In driehoek PQR geldt $\angle R = 180° - \angle P - \angle Q = 180° - 55° - 70° = 55°$.
Omdat $\angle P = \angle R$ is driehoek PQR gelijkbenig met $PQ = QR$.
Na spiegeling zijn alle zijden van de vierhoek gelijk, dus $PQRS$ is een ruit.
De hoeken van de ruit zijn $\angle Q = \angle S = 70°$ en $\angle P = \angle R = 2 \times 55° = 110°$.

f Ruit $PQRS$ is draaisymmetrisch. De kleinste draaihoek is 180º.

12a De vier hoeken zijn samen 360º.
Voor de hoeken A en C blijft over $360° - 2 \times 125° = 110°$.
Dan is $\angle A = \angle C = 110° : 2 = 55°$.

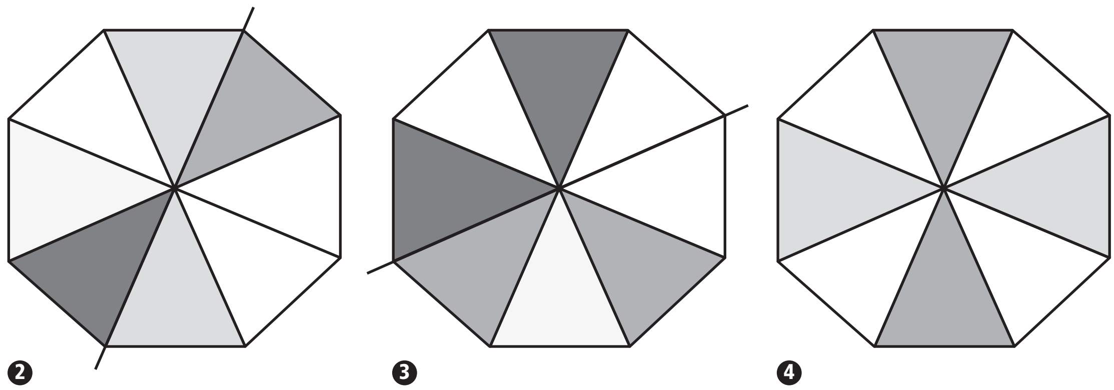
b LN is symmetrieas, dus $\angle M = \angle K = 113°$.
De vier hoeken zijn 360º, dus $\angle N = 360° - 113° - 44° - 113° = 90°$.

13a De acht hoeken vormen een volle hoek en zijn dus 360º.

b De hoek bij punt M is $360° : 8 = 45°$.
De andere twee hoeken zijn dan samen $180° - 45° = 135°$.
Elk van de twee hoeken zijn $135° : 2 = 67{,}5°$.
De hoeken zijn dus 45º, 67,5º en 67,5º.

c Ja, de figuur is draaisymmetrisch. De kleinste draaihoek is 45º

de



ICT Lijn- en draaisymmetrie

I-1 -

I-2 -

I-3 -

I-4a Laat je antwoorden controleren door de computer.
b Laat je antwoorden controleren door de computer.

I-5 -

I-6ab Draai je roosterpapier 90º. Controleer of het vierkant er nog hetzelfde uit ziet.

I-7 -

I-8a De vier hoeken zijn samen 360º.
Voor de hoeken A en C blijft over $360º - 2 \times 125º = 110º$.
Dan is $\angle A = \angle C = 110° : 2 = 55°$
b LN is symmetrieas, dus $\angle M = \angle K = 113°$.
De vier hoeken zijn 360º, dus $\angle N = 360° - 113° - 44° - 113° = 90°$.

I-9 -

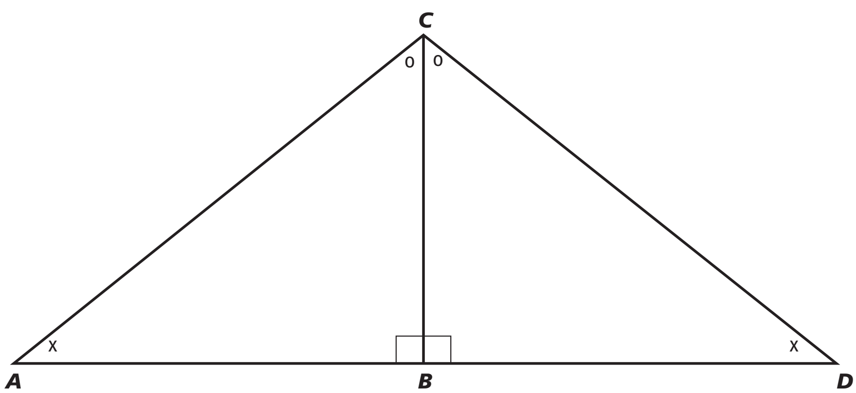
I-10 $\angle C = 360° - \angle A - \angle B - \angle D = 360° - 70° - 96° - 102° = 92°$

$\angle G = \angle E = 72°$, omdat $EFGH$ draaisymmetrisch is over 180º.
Voor de andere twee hoeken blijft over $360º - 2 \times 72º = 216º$.
$\angle F = \angle H = 216° : 2 = 108°$

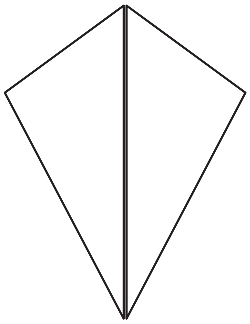
$\angle M = \angle K = 100°$, omdat LN symmetrieas is.
$\angle L = 360° - \angle K - \angle M - \angle N = 360° - 100° - 100° - 94° = 66°$

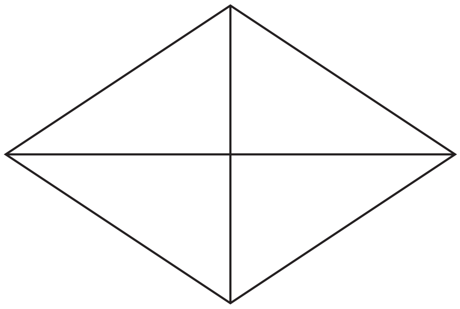
2-3 Tekenen van drie- en vierhoeken

14abc



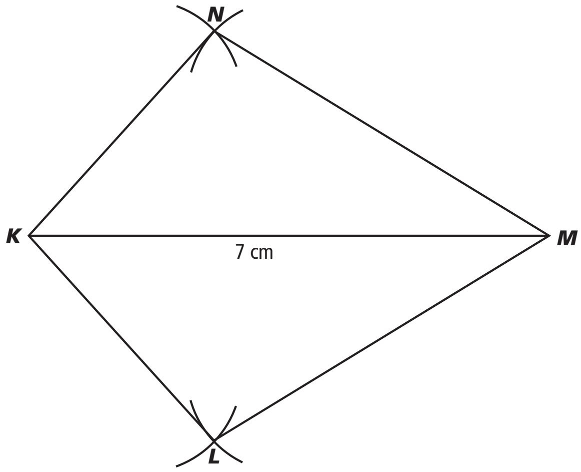
15abc





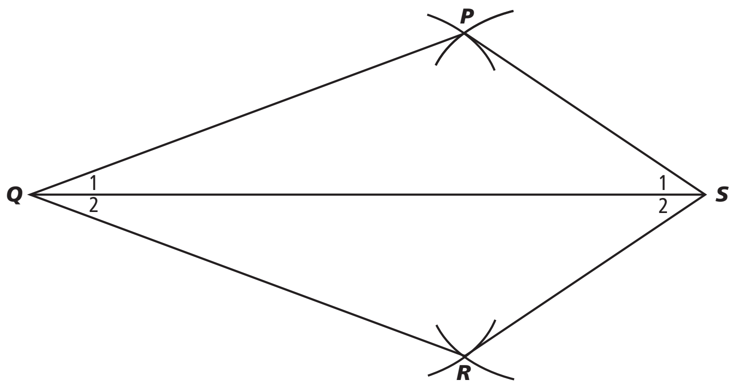
d De hoeken van de vlieger aan de linkerkant en de rechterkant zijn gelijk.
e Voor een ruit zijn vier driehoeken nodig.
f Zie ruit.

16ab



c De vierhoek is een vlieger.
d De symmetrieas is *KM*.
e De hoeken *L* en *N* zijn even groot.
De twee hoeken bij *K* zijn ook even groot.
Dat geldt ook voor de twee hoeken bij *M*.

17ab



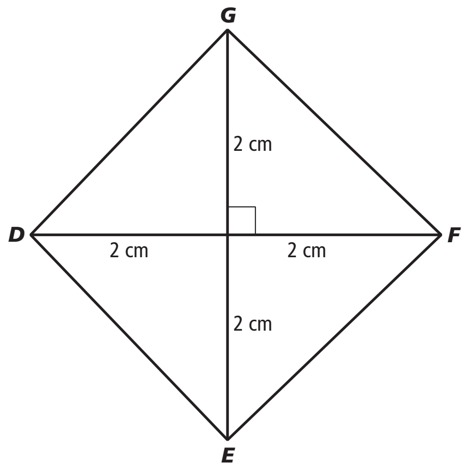
c $\angle P = \angle R$ en verder geldt $\angle Q_1 = \angle Q_2$ en $\angle S_1 = \angle S_2$.

18a -

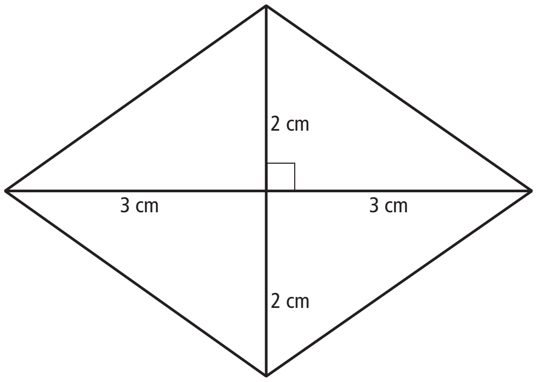
b De vier hoeken bij S zijn allemaal 90º.

c $DS = ES = FS = GS = 2$ cm

d Zie tekening.



19a



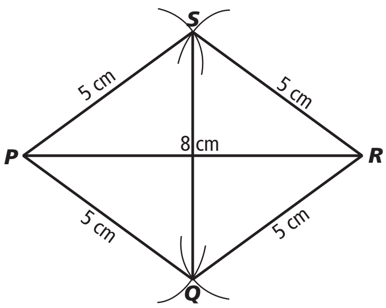
b De vierhoek is een ruit.

c Teken eerst de diagonaal van 6 cm. Zoek het midden op.
Teken vanuit het midden 2 cm naar elke kant. De hoek maakt niet uit (maar geen 90º, want anders krijg je de ruit van tekening a). Er zijn dus meer goede oplossingen.

20a Zie tekening boek.

b $\angle G = \angle E = 44°$ Voor de hoeken F en H blijft over $360º - 2 \times 44º = 272º$.
$\angle F = \angle H = 272° : 2 = 136°$

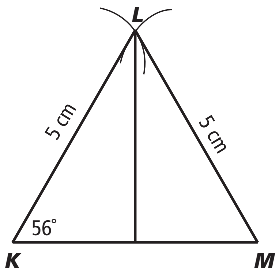
c



d De symmetrieassen zijn PR en QS.

e Ja, $PQRS$ is draaisymmetrisch. Je kunt de ruit een halve slag draaien en dan past hij weer op zichzelf. De draaihoek is 180º.

21ab



c Omdat $KL = LM = 5$ cm is driehoek KLM gelijkbenig. Dan is $\angle M = \angle K = 56°$.

d De drie hoeken in een driehoek zijn samen 180º.
Dan is $\angle L = 180° - \angle K - \angle M = 180° - 56° - 56° = 68°$.

22a Omdat driehoek ABD gelijkbenig is, geldt $\angle B_1 = \angle A = 65°$.

b In driehoek ABD zijn de drie hoeken samen 180º, dus $\angle D_1 = 180° - 65° - 65° = 50°$.

c De hoeken B_1 en B_2 vormen samen een gestrekte hoek en zijn dus samen 180º.
$\angle B_2 = 180° - \angle B_1 = 180° - 65° = 115°$
Voor de hoeken C en D_2 blijft over $180º - 115º = 65º$.
Omdat driehoek BCD gelijkbenig is, geldt $\angle C = \angle D_2 = 65 : 2 = 32{,}5°$.

d De oppervlakte van de driehoek ABD is $AB \times$ *hoogte* : 2.
De oppervlakte van driehoek $ABD = 4 \times 4{,}3 : 2 = 8{,}6$ cm^2.

2-4 Rekenen met vlakke figuren

23a De drie hoeken in driehoek FGS zijn samen 180º, dus $\angle G_1 = 180° - 90° - 56° = 34°$.

b Driehoek GHS is gelijkbenig, want $GS = HS$.

c De hoeken S_3 en S_2 vormen samen een gestrekte hoek, dus $\angle S_2 = 180° - 56° = 124°$.
Voor de andere twee hoeken in de driehoek blijft over $180º - 124º = 56º$.
De driehoek is gelijkbenig, dus $\angle H_1 = \angle G_2 = 56° : 2 = 28°$.

d Kijk in driehoek EGH.
$\angle G_2 = \angle H_1 = 28°$ en $\angle H = 90° + 28° = 118°$.
Dan is $\angle E_1 = 180° - 28° - 118° = 34°$.

24a

zijde	*kwadraat*
HF = 10	100
GF = ?	27,69 +
GH = 11,3	127,69

$GF = \sqrt{27{,}69} = 5{,}3$ cm

b Kijk in driehoek EDF.

zijde	*kwadraat*
HF = 10	100
EH = 9,4	88,36 +
EF = ?	188,36

$EF = \sqrt{188{,}36} = 13{,}7$ cm

c De omtrek van $EFGH$ is $10{,}25 + 8{,}3 + 5{,}3 + 13{,}7 = 39{,}7$ cm.

d *oppervlakte* $\triangle FGH = FG \times FH : 2 = 5{,}3 \times 10 : 2 = 26{,}5$ cm^2
oppervlakte $\triangle EFH = EH \times FH : 2 = 9{,}4 \times 10 : 2 = 47$ cm^2
De oppervlakte van $EFGH$ is $26{,}5 + 47 = 73{,}5$ cm^2.

25a Toepassen van de stelling van Pythagoras in driehoek ACD.

zijde	*kwadraat*
$AD = 3$	9
$CD = ?$	16 +
$AC = 5$	25

$CD = \sqrt{16} = 4$ cm
Toepassen van de stelling van Pythagoras in driehoek BCD.

zijde	kwadraat
$BD = 5$	25
$CD = 4$	16 +
$BC = ?$	41

$BC = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ cm

b *oppervlakte* $\triangle ABC = AB \times CD : 2 = 8 \times 4 : 2 = 16$ cm^2.

c $EF = 1{,}5 \times AB = 1{,}5 \times 8 = 12$ cm
$EG = 1{,}5 \times AC = 1{,}5 \times 5 = 7{,}5$ cm
$FG = 1{,}5 \times BC = 1{,}5 \times 6{,}4 = 9{,}6$ cm

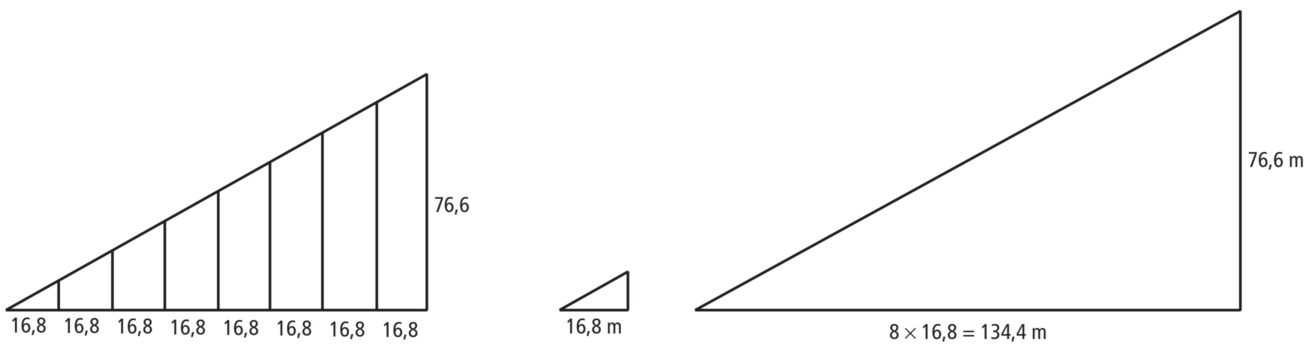
d De hoogtelijn uit G op EF is $1{,}5 \times CD = 1{,}5 \times 4 = 6$ cm.
De oppervlakte van $\triangle EFG = 12 \times 6 : 2 = 36$ cm^2.

26a $HI = 2{,}3 \times AB = 2{,}3 \times 8 = 18{,}4$ cm
$HJ = 2{,}3 \times AC = 2{,}3 \times 5 = 11{,}5$ cm
$IJ = 2{,}3 \times BC = 2{,}3 \times 6{,}4 \approx 14{,}72$ cm

b De hoogtelijn uit J op HI is $2{,}3 \times CD = 2{,}3 \times 4 = 9{,}2$ cm.
De oppervlakte van $\triangle HIJ = 18{,}4 \times 9{,}2 : 2 = 84{,}64$ cm^2.

c $84{,}64 : 16 = 5{,}29$, dus je moet de oppervlakte van driehoek ABC met 5,29 vermenigvuldigen om de oppervlakte van driehoek HIJ te krijgen.

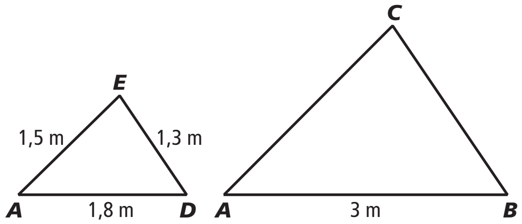
27ab



c *afmetingen kleine driehoek* $\xrightarrow{\times \dots}$ *afmetingen grote driehoek*
$16{,}8 \xrightarrow{\times \dots} 134{,}4$
De factor is $134{,}4 : 16{,}8 = 8$.

d *hoogte kleine driehoek* $\xrightarrow{\times 8}$ *hoogte grote driehoek*
hoogte kleine driehoek $\xleftarrow{:8}$ 76,6
De hoogte van de kleine driehoek is $76{,}6 : 8 = 9{,}575$ m.

28a



b *afmetingen kleine driehoek* $\xrightarrow{\times \ldots}$ *afmetingen grote driehoek*

$1{,}8 \xrightarrow{\times \ldots} 3$

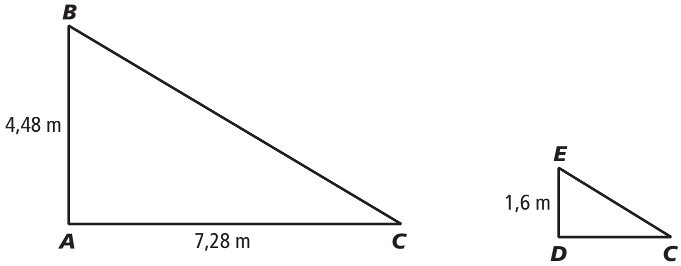
De factor is $3 : 1{,}8 = 1\frac{2}{3} \approx 1{,}67$.

c $BC = 1\frac{2}{3} \times DE = 1\frac{2}{3} \times 1{,}3 \approx 2{,}2$ m

$AC = 1\frac{2}{3} \times AE = 1\frac{2}{3} \times 1{,}5 = 2{,}5$ m

29a De driehoeken ACB en DCE zijn gelijkvormig.

b



c *afmetingen kleine driehoek* $\xrightarrow{\times \ldots}$ *afmetingen grote driehoek*

$1{,}6 \xrightarrow{\times \ldots} 4{,}48$

De factor is $4{,}48 : 1{,}6 = 2{,}8$.

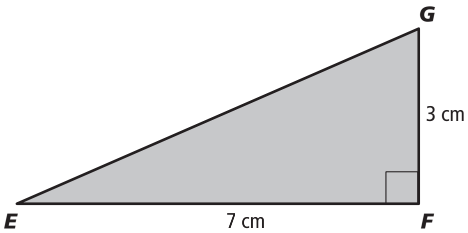
$CD = 7{,}28 : 2{,}8 = 2{,}6$ m.

d $AC = 7{,}28$ m en $CD = 2{,}6$ m, dus $AD = 7{,}28 - 2{,}6 = 4{,}68$ m.

e Gernand heeft $6{,}5 \times 4{,}68 = 30{,}42$ m^2 loopruimte.

2-5 Hoeken en afstanden

30a



b $\tan \angle E = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{GF}{EF} = \dfrac{3}{7}$, dus $\angle E = 23°$.

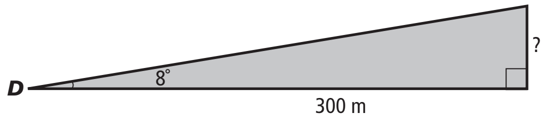
$\tan \angle G = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{EF}{FG} = \dfrac{7}{3}$, dus $\angle G = 67°$.

c

zijde	*kwadraat*
EF = 7	49
FG = 3	9 +
EG = ?	58

$EG = \sqrt{58} \approx 7{,}6$ cm

31ab



c $\tan \angle D = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}}$, dus $\tan 8° = \dfrac{?}{300}$

$? = 300 \times \tan 8° \approx 42{,}1$

d De hoogte van de toren is ongeveer 42 meter.

32a $\tan \angle K = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{5}{12}$, dus $\angle K = 23°$.

$\tan \angle M = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{12}{5}$, dus $\angle M = 67°$

b

zijde	*kwadraat*
DE = 22	484
DF = 8	64 +
EF = ?	548

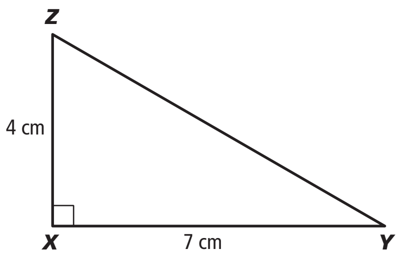
$EF = \sqrt{548} \approx 23{,}4$ cm

c

zijde	*kwadraat*
AB = 16	256
AC = 5,2	27,04 +
BC = ?	283,04

$BC = \sqrt{283{,}04} \approx 16{,}8$ cm

33a



b $\tan \angle Y = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{4}{7}$ dus $\angle Y = 30°$.

c $\angle Z = 180° - 90° - 30° = 60°$ (som van de hoeken van een driehoek)

d

zijde	*kwadraat*
XY = 7	49
XZ = 4	16 +
YZ = ?	65

$YZ = \sqrt{65} \approx 8{,}1$ cm

34a $\tan \angle D_1 = \tan 60° = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{AS}{2}$,

dus $AS = 2 \times \tan 60° \approx 3{,}46$ cm

b

zijde	*kwadraat*
AS = 3,46	11,9716
DS = 2	4 +
AD = ?	15,9716

$AD = \sqrt{15{,}9716} \approx 4{,}0$ cm

c De vier zijden van de ruit zijn allemaal 4 cm, dus de omtrek is $4 \times 4 = 16$ cm.

d $\angle A_1 = 180° - 90° - 60° = 30°$ (som van de hoeken van een driehoek)
Dan is $\angle A = 2 \times 30° = 60°$.

35a $\tan \angle Q = \tan 70° = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{5}{QT}$, dus $QT = \dfrac{5}{\tan 70°} \approx 1{,}82$ cm.

b

zijde	*kwadraat*
TR= 5	25
QT = 1,82	3,3124 +
QR = ?	28,3124

$QR = \sqrt{28{,}3124} \approx 5{,}3$ cm

c De omtrek van $QRST$ is ongeveer 5,3 cm + 1,8 cm + 5,3 cm + 1,8 cm = 14,2 cm.

d De oppervlakte van driehoek QRT is $TR \times TQ : 2 = 5 \times 1{,}8 : 2 = 4{,}5$ cm^2.
De oppervlakte van driehoek SRT is ook 4,5 cm^2.
De oppervlakte van vierhoek $QRST$ is ongeveer $2 \times 4{,}5 = 9$ cm^2.

36a Zie boek.

b $\tan \angle A_1 = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{SD}{AS} = \dfrac{2}{5}$, dus $\angle A_1 = \tan^{-1}(2:5) \approx 22°$.

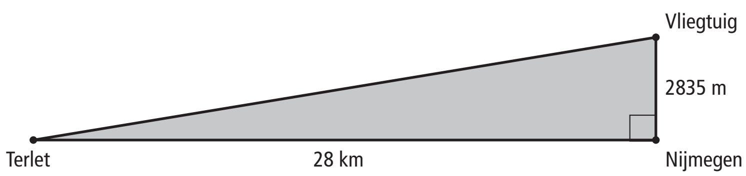
$\angle D_1 = 180° - 90° - 22° = 68°$ (som van de hoeken van een driehoek)

c $\angle D_2 = \angle D_1 = 68°$, omdat BD symmetrieas is.
$\angle C_2 = \angle A_1 = 22°$, omdat BD symmetrieas is.

d $\tan \angle A_2 = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{BS}{AS} = \dfrac{8}{5}$, dus $\angle A_2 = \tan^{-1}(8:5) \approx 58°$

e $\angle B_1 = 180° - 90° - 58° = 32°$ (som van de hoeken in driehoek ABS)
$\angle B_2 = \angle B_1 = 32°$, want BD is symmetrieas.
$\angle C_1 = \angle A_2 = 58°$, want BD is symmetrieas.

37a



b $\tan \textit{stijghoek} = \dfrac{\textit{Nijmegen} - \textit{vliegtuig}}{\textit{Terlet} - \textit{vliegtuig}} = \dfrac{2835}{28\,000}$, dus

$\textit{stijghoek} = \tan^{-1}(2835 : 28\,000) \approx 6°$.
De hoekmeter geeft een stijghoek van 6º aan.

38a $\tan \angle P = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{5}{8}$ dus $\angle P = \tan^{-1}(5:8) \approx 32°$.

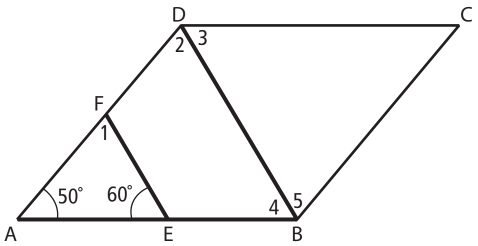
b $\angle R_2 = 180° - 90° - 32° = 58°$ (som van de hoeken in een driehoek)
$\angle R_1 = 90° - 58° = 32°$ (de hoeken R_1 en R_2 zijn een rechte hoek)

c $\tan \angle R_1 = \tan 32° = \dfrac{TQ}{TR} = \dfrac{TQ}{5}$, dus $TQ = 5 \times \tan 32 \approx 3{,}1$ cm = 31 mm.

d De omtrek van de vorm is 8 + 5 + 5 + 3,1 + 3,5 = 24,6 cm.

Extra oefening

E-1a



b $\angle B_4 = \angle E = 60°$, want de hoeken zitten in een F-figuur.

c De hoeken D_3 en B_4 zitten in een Z-figuur.

d $\angle D_3 = \angle B_4 = 60°$, want ze zitten in een Z-figuur.

e $\angle S_1 = \angle P = 70°$ (Z-figuur)
$\angle S_2 = 180° - 70° = 110°$ (gestrekte hoek)
$\angle R = 180° - 70° - 50° = 60°$ (som van de hoeken in driehoek PQR)
$\angle T_1 = \angle B = 50°$ (F-figuur)
$\angle T_2 = 180° - 50° = 130°$ (gestrekte hoek)

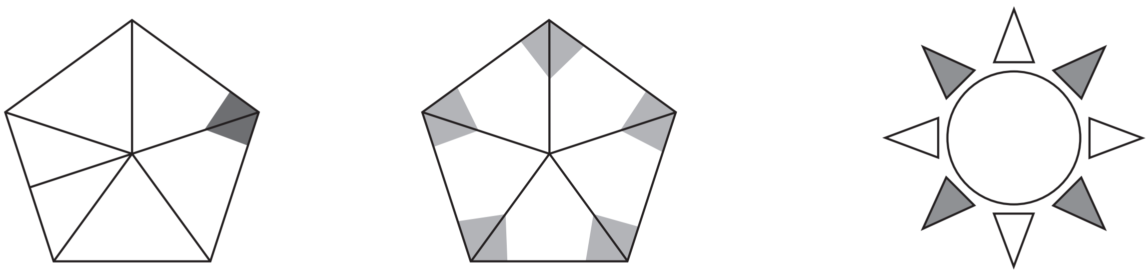
E-2a De hoeken F en H zijn de stompe hoeken. Samen zijn ze $2 \times 114° = 228°$.
Voor de andere twee hoeken blijft over $360° - 228° = 132°$.
Elk van de twee scherpe hoeken is $132° : 2 = 66°$.

b In het midden zitten vijf even grote hoeken. Elke hoek is dus $360° : 5 = 72°$.

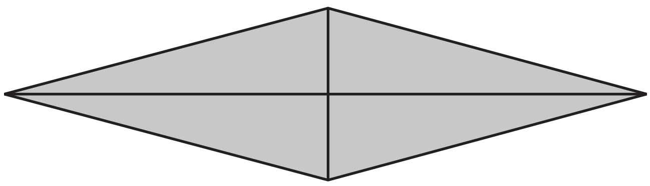
c Voor de andere twee hoeken blijft over $180° - 72° = 108°$.
Omdat de driehoek gelijkbenig is zijn de twee hoeken gelijk, dus elk $108° : 2 = 54°$.
De driehoek heeft hoeken van 54°, 54° en 72°.

d De kleinste draaihoek is 72°. De andere draaihoeken zijn 144°, 216° en 288°.

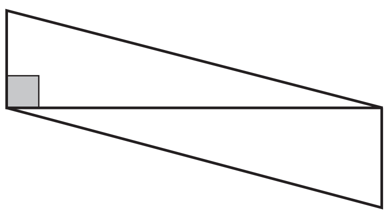
E-3abc



E-4a



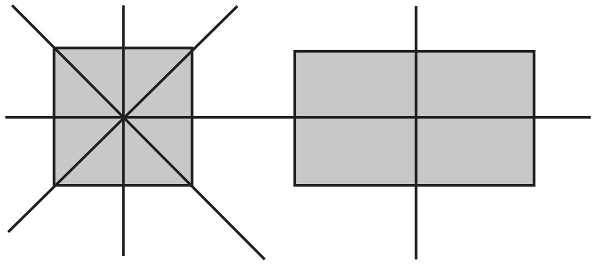
b



Van twee rechthoekige driehoeken kun je een parallellogram maken.

E-5a Bij een vierkant en bij een rechthoek zijn de diagonalen even lang.

b Een vierkant heeft vier symmetrieassen en een rechthoek heeft er twee.



c Het vierkant is draaisymmetrisch met een kleinste draaihoek van 90º
De rechthoek is draaisymmetrisch met een draaihoek van 180º.

E-6a

zijde	*kwadraat*
$AB = 3$	9
$BE = 5$	25 +
$AE = ?$	34

$AE = \sqrt{34} \approx 5{,}8$

b *oppervlakte* $\triangle ACE = AC \times BE : 2 = 6 \times 5 : 2 = 15$

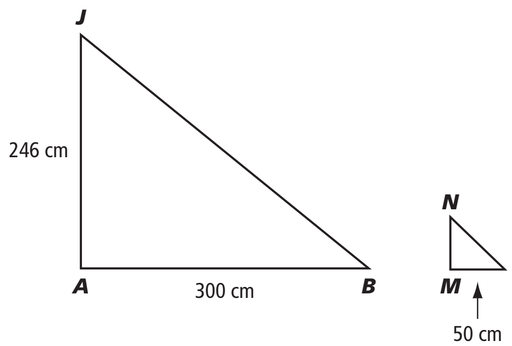
c

zijde	*kwadraat*
$CP = 4{,}5$	20,25
$FP = 7{,}5$	56,25 +
$CF = ?$	76,50

$CF = \sqrt{76{,}50} \approx 8{,}7$

d $AG = AE + EG = AE + CF = 5{,}8 + 8{,}7 = 14{,}5$
$AD = 6 + 9 = 15$
$DG = AG = 14{,}5$
De omtrek van driehoek ADG is $14{,}5 + 15 + 14{,}5 = 44$

E-7a



b *afmetingen kleine driehoek* $\xrightarrow{\times ...}$ *afmetingen grote driehoek* $50 \xrightarrow{\times ...} 300$
De factor is $300 : 50 = 6$. De zijden van de kleine driehoek moeten met factor 6 worden vermenigvuldigd om die van de grote driehoek te krijgen.

c $MN \times 6 = 246$, dus $MN = 246 : 6 = 41$ cm.

d Kijk naar de driehoeken EBG en MBN. $MB = 50$ cm en $EB = 200$ cm.
De factor is dus $200 : 50 = 4$.
Dan is $EG = 4 \times MN = 4 \times 41$ cm $= 164$ cm.

E-8a $\tan \angle D_1 = \frac{1}{4}$, dus $\angle D_1 = \tan^{-1}(1:4) \approx 14°$.
Omdat BD symmetrieas is, is $\angle D = 2 \times 14° = 28°$.
AC is ook symmetrieas, dus $\angle B = \angle D = 28°$.
Voor de hoeken A en C blijft over $360° - 2 \times 28° = 304°$.
BD is symmetrieas, dus $\angle A = \angle C = 304° : 2 = 152°$.

b Kijk in driehoek SMR (M is het snijpunt van de diagonalen).
$\tan \angle S = \frac{RM}{SM} = \frac{2}{3}$, dus $\angle S = \tan^{-1}(2:3) \approx 33{,}7°$
Kijk nu in driehoek SMP.
$\tan \angle S = \frac{PM}{SM} = \frac{5}{3}$. dus $\angle S = \tan^{-1}(5:3) \approx 59{,}0°$
De hele hoek is dan $\angle S = 33{,}7° + 59{,}0° \approx 93°$

c $\tan 30° = \frac{GU}{GK} = \frac{GU}{20}$, dus $GU = 20 \times \tan 30° \approx 11{,}5$ cm.

d $\tan \angle W = \frac{11{,}5}{12}$, dus $\angle W = \tan^{-1}(11{,}5:12) \approx 44°$

e *oppervlakte* $\triangle KWU = KW \times GU : 2 = 32 \times 11{,}5 : 2 = 184$ cm^2.

Verwerken en toepassen

V-1a $\angle D_1 = \angle C = 105°$ ($ABCD$ is een vlieger, dus AB is symmetrieas)
$\angle A_2 = 360° - 105° - 105° - 112° = 38°$ (de vier hoeken van de vlieger zijn samen 360º)

b $\angle D_2 = 180° - \angle D_1 = 180° - 105° = 75°$ (de hoeken vormen een gestrekte hoek)
$\angle E = \angle D_2 = 75°$ (driehoek SDE is gelijkbenig)

c $\angle A_1 = 180° - 75° - 75° = 30°$ (som van de hoeken van een driehoek)

V-2a De stelling van Pythagoras in driehoek ADC is:

zijde	*kwadraat*
$AD = 5$	25
$CD = ?$	5,25 +
$AC = 5{,}5$	30,25

$CD = \sqrt{5{,}25} \approx 2{,}29$ m
De hoogte is 2,29 m, dus daar kan een volwassen man onderdoor lopen.

b $AC + BC$ is de lengte van het touw en dat blijft $5{,}5 + 5{,}5 = 11$ meter.
Omdat BC al langer is dan $AB = 10$ meter, blijft er voor AC minder dan 1 meter over.

V-3a In driehoek ABC zijn de drie hoeken samen 180º.
Dan is $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 64° - 67° = 49°$.

b In driehoek BFG zijn de drie hoeken 180º.
Dan is $\angle F_1 = 180° - \angle G - \angle B = 180° - 90° - 49° = 41°$.
$\angle F_2 = 180° - \angle F_1 = 180° - 41° = 139°$ (gestrekte hoek)

c $\angle G_2 = \angle F_1 = 41°$ (Z-figuur)
$\angle G_1 = 180° - 90° - \angle G_2 = 180° - 90° - 41° = 49°$ (Z-figuur)

d $\angle D_1 = 180° - 90° - 64° = 26°$ (som van de hoeken in driehoek AED)
$\angle D_2 = \angle G_2 = 41°$ (Z-figuur)
$\angle D_3 = 180° - \angle D_1 - \angle D_2 = 180° - 26° - 41° = 113°$ (gestrekte hoek)

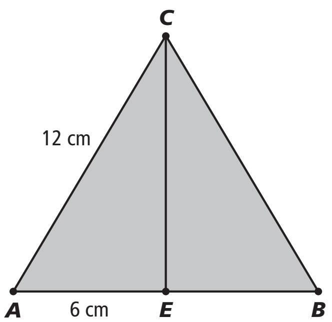
V-4 De lange diagonaal van de ruit is $2 \times 6{,}5$ cm $= 13$ cm.
Om de andere diagonaal te berekenen pas je de stelling van Pythagoras toe in één van de driehoeken.

zijde	*kwadraat*
lange rechthoekszijde = 6,5	42,25
korte rechthoekszijde = ?	21,75 +
langste zijde = 8	64

De kortste rechthoekszijde is $\sqrt{21{,}75} \approx 4{,}663...$ cm.
De tweede diagonaal is $2 \times 4{,}663... \approx 9{,}3$ cm.
De oppervlakte van de rechthoek om de ruit is $13 \times 9{,}3 = 120{,}9$ cm^2.
De oppervlakte van de ruit is $120{,}9 : 2 = 60{,}45$ cm^2.
De twee witte stukjes zijn samen een halve cirkel met straal 1,5 cm.
De oppervlakte van het witte deel is $1{,}5 \times 1{,}5 \times \pi : 2 \approx 3{,}53$ cm^2.
De oppervlakte van het gekleurde deel is ongeveer $60{,}45 - 3{,}53 = 56{,}92$ cm^2.

De straal van de oranje cirkel is $54 : 2 = 27$ cm.
De oppervlakte van de oranje cirkel is $27 \times 27 \times \pi = 2290{,}22...$ cm^2.
De straal van de witte cirkel is $25 : 2 = 12{,}5$ cm.
De oppervlakte van de witte cirkel is $12{,}5 \times 12{,}5 \times \pi = 490{,}87...$ cm^2.
De oppervlakte van het gekleurde deel is $2290{,}22... - 490{,}87... \approx 1799$ cm^2.

V-5a



b

zijde	kwadraat
$AE = 6$	36
$CE = ?$	108 +
$AC = 12$	144

$CE = \sqrt{108} \approx 10{,}4$ cm.

c De oppervlakte van driehoek ABC is $12 \times 10{,}4 : 2 = 62{,}4$ cm^2.
d De vlieger bestaat uit zes driehoeken, dus de oppervlakte is $6 \times 62{,}4 = 374{,}4$ cm^2.
e De afmetingen worden allemaal twee keer zo groot.
De oppervlakte van één driehoek wordt dan $24 \times 20{,}8 : 2 = 249{,}6$ cm^2.
De oppervlakte van de grote vlieger is $6 \times 249{,}6 = 1497{,}6$ cm^2.

V-6a De oppervlakte van de cirkel is $4{,}6 \times 4{,}6 \times \pi \approx 66{,}48$ m^2.
De oppervlakte van het vierkant is $4{,}6 \times 4{,}6 = 21{,}16$ m^2.
Het gele gedeelte is $66{,}48 - 21{,}16 = 45{,}32$ m^2.
b De figuur heeft vier symmetrieassen.
c Ja, de figuur is draaisymmetrisch. De kleinste draaihoek is 90º.

V-7a Driehoek DEC heeft dezelfde vorm als driehoek ABC.

b De hoogte in driehoek ABC is 248 cm.

De hoogte in driehoek DEC is $248 - 90 = 158$ cm.

$\textit{hoogte } \triangle DEC \xrightarrow{\times \dots} \textit{hoogte } \triangle ABC$

$158 \xrightarrow{\times \dots} 248$, dus de factor is $248 : 158 \approx 1{,}5696$

Dan is $DE = 320 : 1{,}5696 \approx 203{,}9$ cm.

c Het dressoir niet, want het dressoir is 120 cm breed en de zolder is op 90 cm hoogte ongeveer 204 cm breed.

V-8a $\tan 38° = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{6{,}5}{a}$, dus $a = \dfrac{6{,}5}{\tan 38°} \approx 8{,}3$ m.

b $\tan 9° = \dfrac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} = \dfrac{6{,}5}{b}$, dus $b = \dfrac{6{,}5}{\tan 9°} \approx 41{,}0$ m.

c Voor Rina geldt:

zijde	*kwadraat*
a = 8,3	68,89
hoogte = 6,5	42,25 +
afstand Rina	111,14

Rina legt $\sqrt{111{,}14} \approx 10{,}5$ meter af.

Voor de fietser geldt:

zijde	*kwadraat*
b = 41,0	1681
hoogte = 6,5	42,25 +
afstand fietser	1723,25

De fietser legt $\sqrt{1723{,}25} \approx 41{,}5$ meter.

De fietser moet $41{,}5 - 10{,}5 = 31$ meter meer afleggen als Rina.

Rekenen 2

R-1a $8{,}45 \times 1000 = 8450$

b $0{,}369 \times 10\,000 = 3690$

c $45{,}8 \times 100\,000 = 4\,580\,000$

d $9{,}785 \times 10 = 97{,}85$

e $0{,}0563 \times 100 = 5{,}63$

f $25\,000 : 100\,000 = 0{,}25$

g $54{,}2 : 10 = 5{,}42$

h $9657 : 1000 = 9{,}657$

i $623{,}3 : 100 = 6{,}233$

j $1122{,}33 : 10\,000 = 0{,}112\,233$

R-2 50% van 750 leerlingen is $750 : 2 = 375$ leerlingen.

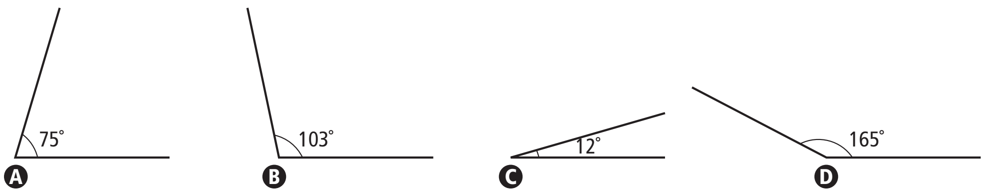
b 20% van 65 000 kg is $65\,000 : 5 = 13\,000$ kg.

c 1% van € 800,- is € 8,-, dus 35% van € 800,- is 35 × € 8,- = € 280,-.

d 25% van 12 miljoen mensen is $12\,000\,000 : 4 = 3\,000\,000$ mensen.

e 1% van 16 000 liter is 160 liter, dus 37,5% is $37{,}5 \times 160 = 6000$ liter.

f 1% van 1 000 000 liter is 10 000 liter, dus 90% is $90 \times 10\,000 = 900\,000$ liter.

R-3a 

b De hoeken A en C zijn scherp.
c De andere twee hoeken zijn stompe hoeken.
d Een gestrekte hoek is 180º.
e Een hoek van 90º is een rechte hoek.

R-4

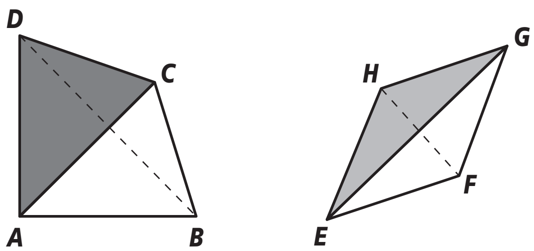
a 5		b 1	c 2	d 1
e 4	f 3		g 1	4
h 7	0	5	6	
i 6	2		j 1	k 8
	l 5	2	6	4

R-5a 655 mg = 0,655 gram
b 3,6 kg = 3600 gram
c 0,02 kg = 20 000 mg
d 98 000 mg = 0,098 kg
e 450 gram = 0,45 kg
f 0,72 gram = 720 mg
g 5 dL = 50 cL
h 300 cL = 3 liter
i 0,7 liter = 700 mL
j 962 mL = 96,2 cL
k 62 dL = 6,2 liter
l 308 liter = 30 800 cL

Oefenopdrachten bij hoofdstuk 2

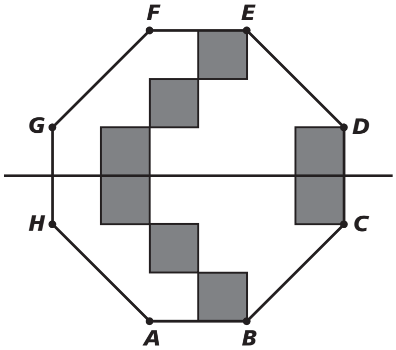
1 De hoeken B_1 en 120º vormen een gestrekte hoek, dus $\angle B_1 = 180° - 120° = 60°$.
$\angle B_2 = 120°$ want het zijn overstaande hoeken.
De hoeken B_3 en 120º vormen een gestrekte hoek, dus $\angle B_3 = 180° - 120° = 60°$.
$\angle C_1 = 180° - 73° - 38° = 69°$ want de drie hoeken vormen een gestrekte hoek.
$\angle D_1 = 180° - 85° = 95°$ want $\angle D_1$ vormt met 85º een gestrekte hoek.
$\angle D_3 = 180° - 85° - 40° = 55°$ want de drie hoeken vormen samen een gestrekte hoek.

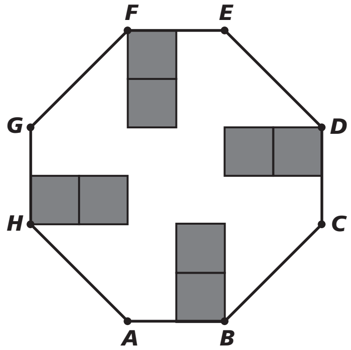
2ab -



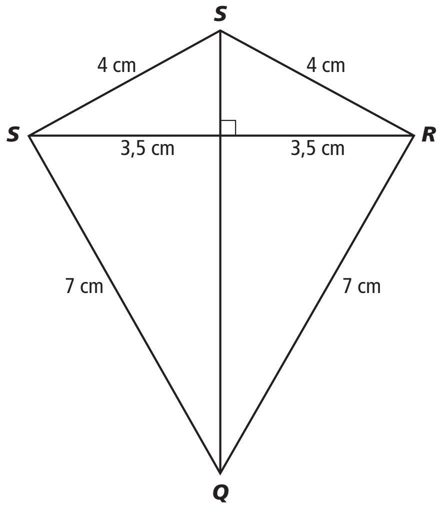
c $EFGH$ is ruit.

3ab -





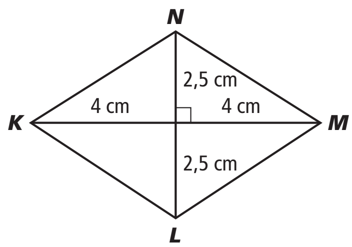
4



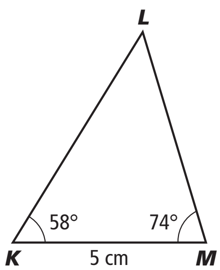
5a Zie tekening ruit.

b Maak in gedachten een rechthoek om de ruit.
De oppervlakte van de rechthoek is $8 \times 5 = 40$ cm^2.
De oppervlakte van de ruit is de helft van de rechthoek.
De oppervlakte van de ruit is $40 : 2 = 20$ cm^2.

c $\tan \angle MKL = \frac{2{,}5}{4}$, dus $\angle MKL = \tan^{-1}(2{,}5 : 4) \approx 32°$

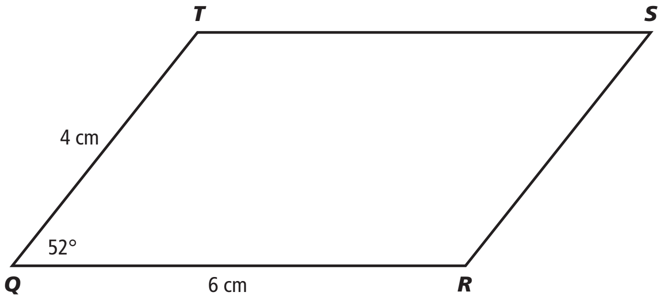


6a



b De drie hoeken van de driehoek zijn samen 180º, dus $\angle L = 180° - 58° - 74° = 48°$.

7a

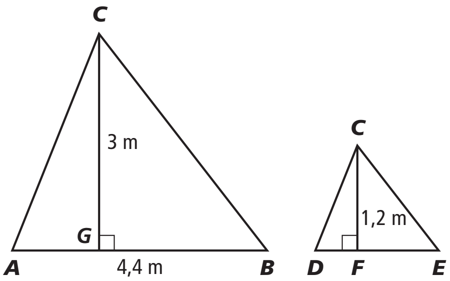


b $\angle S = \angle Q = 52°$

c In een vierhoek zijn de vier hoeken samen 360º.
Voor de hoeken R en T blijft over 360º − 52º − 52º = 256º.
Dan is $\angle R = \angle T = 256° : 2 = 128°$.

8a De driehoeken ABC en DEC. zijn gelijkvormig.

b



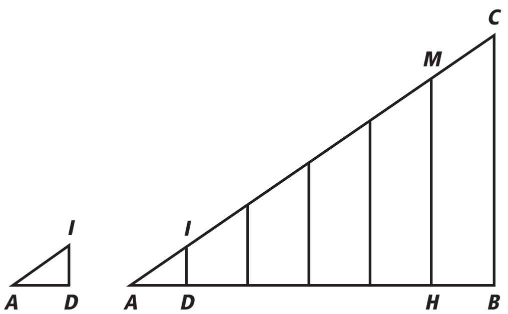
c De vergrotingsfactor is 1,2 : 3 = 0,4 of 3 : 1,2 = 2,5.

d $DE = 0{,}4 \times 4{,}4 = 1{,}76$ m

e De oppervlakte van driehoek $DEC = 1{,}76 \times 1{,}2 : 2 = 1{,}056$ m^2.

f De vergrotingsfactor is 2,5, dus moet je de oppervlakte van driehoek DEC
met $2{,}5^2 = 6{,}25$ vermenigvuldigen.

9a



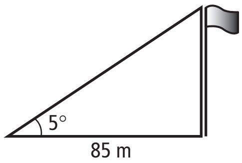
b $AD = 50$ cm en $AB = 6 \times 50 = 300$ cm, dus de factor is 300 : 50 = 6.
$DI = 186 : 6 = 31$ cm

c Driehoek AHM is een vergroting van driehoek ADI met vergrotingsfactor 5.
Dan is $HM = 5 \times 31$ cm = 155 cm.

d Baan 2 is 186 − 155 = 31 cm korter.

e Baan 3 is 155 − 31 = 124 cm en baan 4 is 124 − 31 = 93 cm.

10a Zie schets.

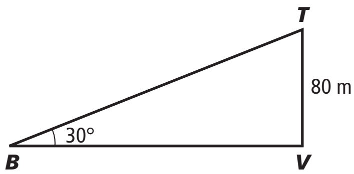


b Vanuit de gegeven hoek is de aanliggende rechthoekszijde bekend en wordt de overstaande rechthoekszijde gevraagd. Dan gebruik je de tangens.

$\tan 5° = \dfrac{\textit{hoogte mast}}{85}$

Dan is de hoogte van de mast $85 \times \tan 5° \approx 7{,}4$ m.

11a Zie schets.



b Ggeven is de overstaande rechthoekszijde en gevraagd wordt de aanliggende rechthoekszijde.
Dan reken je met de tangens.

$\tan 3° = \dfrac{80}{\textit{afstand tot toren}}$, dus de afstand tot de toren is $80 : \tan 3° \approx 1526$ m.